

Mathematische Modellierung

Was ist mathematische Modellierung?

- Modell: vereinfachte Darstellung der Realität
- Situationen der Realität lassen sich mittels unterschiedlicher Modelle modellieren
- Modellierung: wechselseitige Beziehung zwischen Realität und Mathematik herstellen
- Die Behandlung realitätsbezogener Aufgaben im Mathematikunterricht

Realitätsbezogene Aufgaben im Unterricht

2 Aufgaben zum Vergleich:

<p><i>Jana hat 2 Bonbons. Tabea hat 5 Bonbons mehr. Wie viele hat Tabea?</i></p>	<p><i>Max will an seinem 8. Geburtstag mit seinen Gästen Schokoküsse essen. Wie viele Schachteln muss er mit seiner Mutter einkaufen?</i></p>
<p>Rechenoperation soll veranschaulicht werden -> Eingekleidete Aufgabe Sachkontext ist austauschbar (egal ob Autos oder Bonbons)</p>	<p>Sachkontext ist für Lösung entscheidend Problem stellt sich im Alltag in der Realität der Kinder wirklich Wie viele Gäste? Wie viel isst jeder? Wie viele Schokoküsse sind in einer Packung? -> viele Anlässe zum Zählen, Schätzen und Rechnen Modellierungsaufgabe</p>

Sachaufgaben können Modellierungsaufgaben sein, müssen aber nicht!

Welche Merkmale haben Modellierungsaufgaben ?

Modellierungsaufgaben sind

- offen
- komplex
- realistisch
- authentisch
- problemhaltig
- lösbar durch Ausführen eines Modellierungsprozesse

Was ist der Modellierungsprozess?

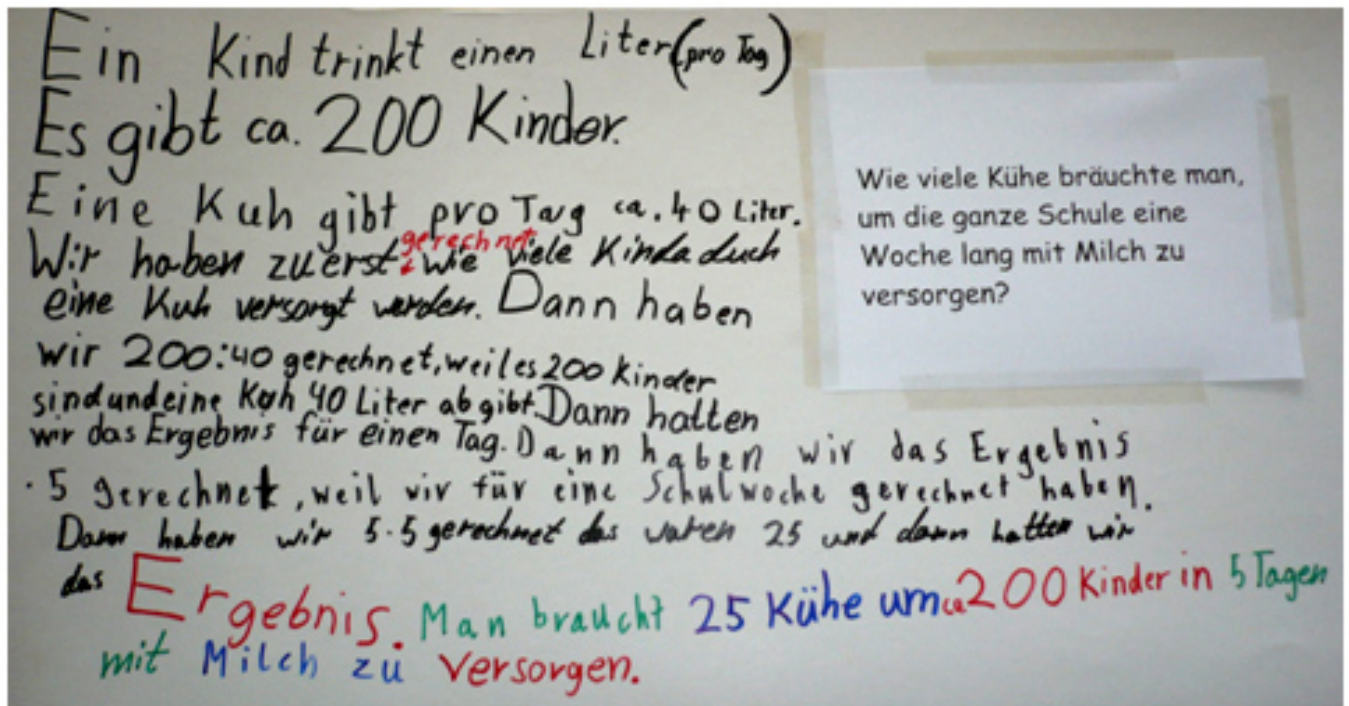
Dazu eine Aufgabe:

Wie viele Kühe bräuchte man, um die ganze Schule eine Woche lang mit Milch zu versorgen?

- Wie lösen Sie die Aufgabe?
- Notieren Sie Ihre Lösung möglichst detailliert

Lösung von 4 Kindern einer 4. Jgst.

(http://www.kira.tu-dortmund.de/front_content.php?idcat=186)



waren sie an ihnen vorgegangen. Was hätten sie anders gemacht.

Und stimmt überhaupt das Ergebnis dieses Lösungswegs?

Welche Schritte sind für das Lösen einer komplexen Sachaufgabe nötig?

•Bei der Lösung eines komplexen Sachproblems durchlaufen Kinder verschiedene Phasen.

•Anhand eines Videos konnten Sie beobachten, wie ernsthaft und ausdauernd die Kinder sich mit der „Kuh“-Aufgabe beschäftigen.

Folgende einzelnen Phasen haben die Kinder zum Lösen der Aufgabe durchlaufen.

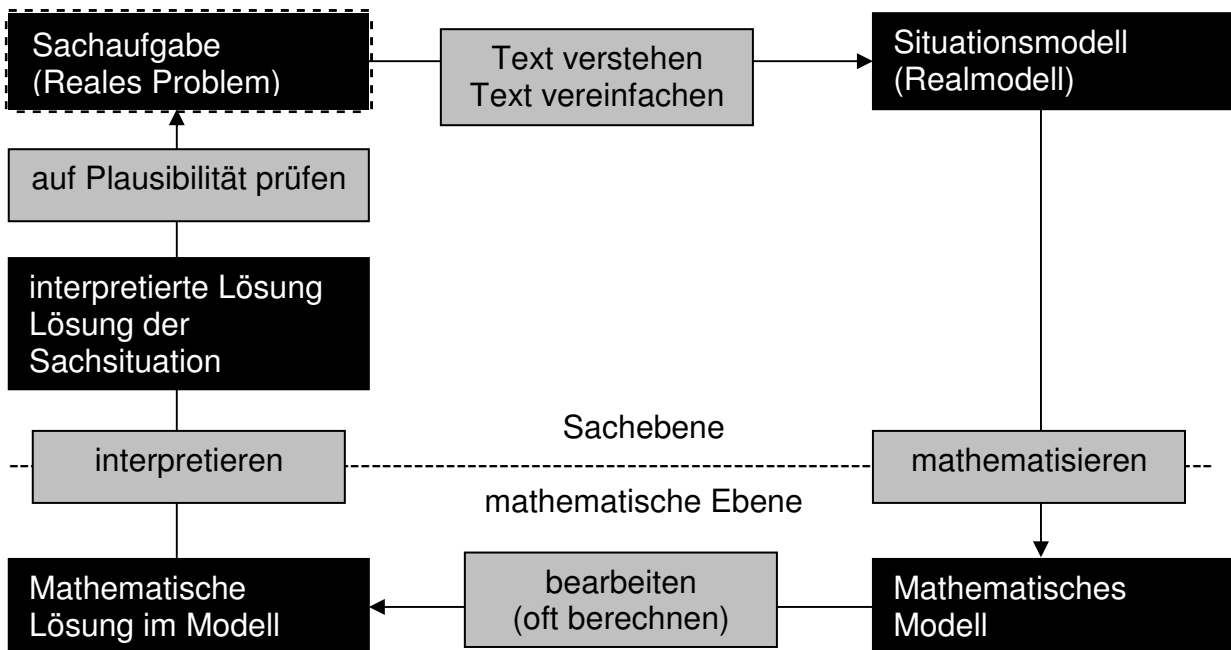
(in Anlehnung an Maren Laferi http://www.kira.tu-dortmund.de/front_content.php?idcat=210&idart=323&lang=8)

Modellierungskreislauf	Lösungsprozess der Kinder in dem Video
Text verstehen	Die Kinder lesen die Sachaufgabe (Reales Problem) und erfassen die Situation (Bildung eines Situationsmodells).
Text vereinfachen/ strukturieren	Sie strukturieren sich den Sachverhalt, indem sie direkt die wichtigsten Fragen aufwerfen, die sie zur Lösung der Aufgabe beantworten müssen. Wie viele Kinder sind auf unserer Schule? Wie viel Milch trinkt jedes Kind? Wie viel Milch passt in ein Glas? Wie viel Liter Milch gibt eine Kuh am Tag? (Bewusstmachung des Problems)
mathematisieren	Sie überlegen dann jeweils, wie sie an diese Informationen herankommen und beschaffen sich die Informationen durch Expertenbefragung (Schüleranzahl), indem sie im Buch nachlesen (Wie viel Liter Milch gibt eine Kuh?), in dem sie Annahmen formulieren (Jedes Kind trinkt ein Glas Milch) und Bezugsgrößen herstellen (In einer kleinen Wasserflasche sind 0,5l, damit kann man zwei Gläser füllen).

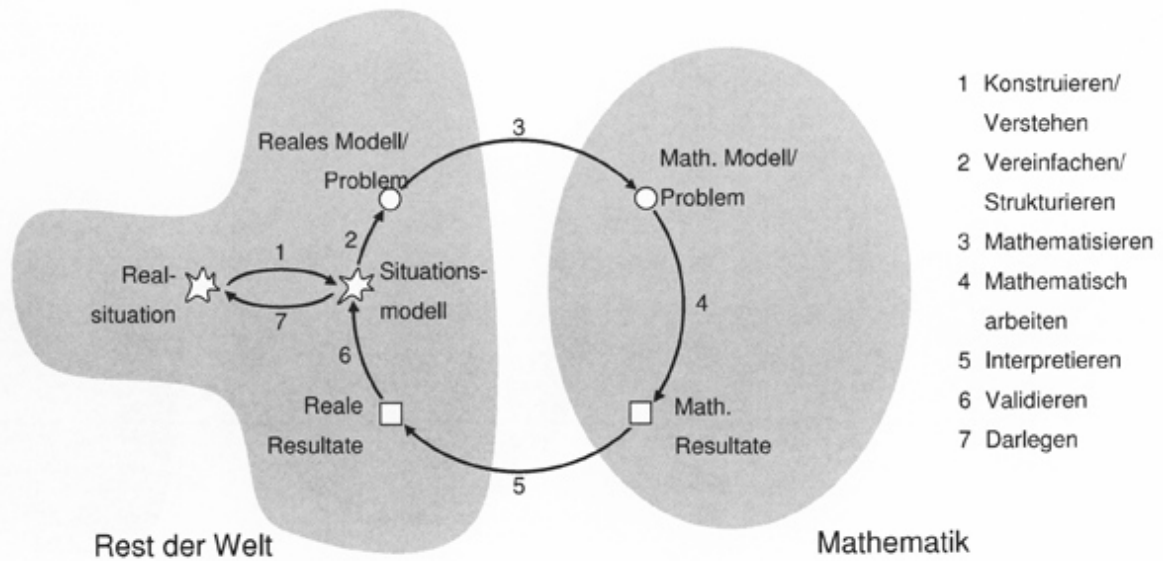
Bearbeiten (oft berechnen)	Die Kinder arbeiten hier immer wieder mathematisch (Aufstellen von mathematischen Modellen): Addieren aller zu berücksichtigenden Personen an der Schule (236) Berechnung des Glaseinhalts (0,25l) Berechnung der Personenanzahl, die mit einem Liter versorgt sind (1l = vier Personen) Berechnung der Literzahl, die sie für eine Woche benötigen ($236:4=58$)
interpretieren	Sie übertragen ihr Ergebnis „58“ (mathematische Lösung im Modell) wieder auf die Sachsituation und interpretieren es so, dass sie nur zwei Kühe benötigen, da zwei Kühe zusammen 60 Liter Milch geben.
Auf Plausibilität prüfen (validieren)	Sie prüfen ihre Lösung der Sachsituation auf Plausibilität (validieren), indem sie überlegen, ob sie wirklich nur mit „2 Kühen arbeiten“ können, d.h. ob sie jeden Tag 30 Liter Milch geben können oder doch jeden Tag 2 neue Kühe brauchen Sie entscheiden, dass „zwei Kühe“ die richtige Lösung ist und begründen dies auch (Bezug noch mal auf das Buch, ein Liter bleibt ja auch jeden Tag über...), anschließend schreiben sie ihren gesamten Lösungsweg noch einmal auf (ist auf dem Video nicht zu sehen)

Modellierungskreislauf

Diese einzelnen Phasen können als Kreislauf dargestellt werden und werden als Modellierungskreislauf bezeichnet.



(nach M. Pfaller: Sachrechnen im 3. Schuljahr: Anknüpfen und Vertiefen – Manege frei für Lösungsschritte, Lösungshilfen und Größen. In: Häring, G. (Hrsg.): Start in den Unterricht, Mathematik, Klasse 3, Friedrich Verlag 2010, S- 57) (www.start-in-den-unterricht.de),



Modellierungskreislauf nach Blum & Leiß, 2006

„Modellierungskreislauf“ für Kinder

<p>Sachaufgaben für Leitaden Mein</p>	<p>4. Lösung aufschreiben und überprüfen</p> <ul style="list-style-type: none"> • Lösung noch einmal überprüfen • Antwort schreiben • Aufgaben, Rechenweg und Lösung noch einmal durchlesen • Kann das stimmen? 	<p>• Rechenweg übersichtlich darstellen</p> <p>• Ergebnis aufschreiben</p>	<p>3. Mathematik nutzen</p> <ul style="list-style-type: none"> • rechnen • zeichnen • schätzen • die Lösung durch geschicktes Probieren finden
<p>1. Aufgaben verstehen</p> <ul style="list-style-type: none"> • Text lesen • Inhalt mit eigenen Worten erzählen • unbekannte Wörter herausuchen • Situation genau vorstellen • nacherzählen • nachspielen 	<ul style="list-style-type: none"> • wichtige Informationen in Stichworten aufschreiben • wichtige Angaben im Text markieren • unwichtige Angaben durchstreichen • Fragestellung überlegen • Skizze 	<p>2. Problem bearbeiten</p> <ul style="list-style-type: none"> • Rechenweg planen und aufschreiben • vereinfachen • fehlende Informationen ergänzen • Skizze anfertigen 	<ul style="list-style-type: none"> • Tabelle erstellen • Diagramm zeichnen • Rechenstrich, Rechenbaum, ...

- Kindgerecht formulierte Schlagworte
- können Kinder beim Lösen von Sachaufgaben unterstützen
- können Kindern die einzelnen Schritte im Modellierungsprozess bewusst werden lassen
- Leitfaden ist kein starres Rezept
- > am besten mit Kindern gemeinsam erarbeiten!

Ist Schema „Frage-Rechnung-Antwort“ bei Modellierungsaufgaben auch sinnvoll?

F-R-A-Schema	Modellierungsprozess
Frage	Auseinandersetzen mit Problem, Fragestellung
Abschreiben der Frage führt nicht dazu, dass sich Kind Gedanken um Sachkontext macht	Kind soll sich mit Sachkontext und Verständnis der Situation aktiv auseinandersetzen
Rechnung	Arbeiten im mathematischen Modell
Math. Arbeiten wird auf Rechnen reduziert, engt Kind ein	Begründung sinnvoller: Wie bist du darauf gekommen?
Antwort	interpretieren
Oft Frage in Aussagesatz umformuliert, keine kritische Reflexion über Ergebnis	Kritische Reflexion über Ergebnis und seine Bedeutung

Beispiel zu Schema „Frage-Rechnung-Antwort“ bei Modellierungsaufgaben

Aufgabe: *Wie viele Autos sind so schwer wie ein Elefant?*



Ich mach mit Frage, Rechnung, Antwort...
(Pause)... Wie soll ich da jetzt die Rechnung

Nr. 1a
 F.: *Wie viele Autos sind so schwer wie ein Elefant?*
 R.: -
 A.: *5 Autos sind so schwer wie ein Elefant.*

Schülerin sieht vielfältige Überlegungen, die im Interview deutlich wurden und zur Lösung geführt haben, nicht als Rechnung an!

Warum Modellierungsaufgaben in der GS?

- Lebensvorbereitung (Kompetenzen zum Anwenden von Mathematik; Bewältigung des Alltags)
- Heuristische Strategien (Problemlöse- und Argumentationsfähigkeiten, kreatives Verhalten)
- Motivation zur Beschäftigung mit der Mathematik
- Verständnis mathematischer Inhalte
- „Sachrechnen als Lernziel“ (zur Umwelterschließung) (vgl. Winter)
- Lehrplan
- Bildungsstandards Modellieren
 - ist eine von fünf allgemeinen mathematischen Kompetenzen
 - Sachtexten und anderen Darstellungen der Lebenswirklichkeit die relevanten Informationen entnehmen,
 - Sachprobleme in die Sprache der Mathematik übersetzen, innermathematisch lösen und diese Lösungen auf die Ausgangssituation beziehen

- zu Termen, Gleichungen und bildlichen Darstellungen Sachaufgaben formulieren
- ist übergreifend
- ermöglicht auch alle anderen mathematischen Kompetenzen zu trainieren (Probleme lösen, argumentieren, kommunizieren, ...)
- fördert je nach Sachkontext auch unterschiedliche inhaltliche mathematische Kompetenzen (Zahlen und Operationen, Größen und Messen, Raum und Form, Daten, Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit)

Können Grundschüler Modellieren lernen? • Modellieren im Alltag bedeutet auf natürliche Art Probleme zu lösen. Ein fünfjähriges Kind, das den Tisch für die ganze Familie deckt modelliert auf seinem Niveau

- Anfangs nicht zu viel erwarten, Raum für Entwicklung lassen
- Ab Klasse 1 Kompetenzen mit offenen, realitätsbezogenen Aufgaben aufbauen
- Bedingung schaffen, dass Kinder selbständig lernen und begründen können
- EIS-Prinzip beachten (1. Klasse v.a. enaktiv)

Wo finde ich Modellierungsaufgaben für die GS ?

- Maaß, K.: Mathematikunterricht weiterentwickeln, Aufgaben zum mathematischen Modellieren, Erfahrungen aus der Praxis, Für die Klassen 1 bis 4, Cornelsen 2009
- Hinrichs, G.: Modellierung im Mathematikunterricht, Spektrum, Heidelberg 2008
- http://www.kontexis.de/upload/pdf/Arbeitsheft/AH-03_2008.pdf (viele Modellierungsaufgaben von Katja Maaß!)

Methodische Überlegungen zum Modellieren (nach Katja Maaß)

1. Einstieg – Sachsituation klären und Problembewusstsein entwickeln

- Lehrervortrag
- Erzählen von Geschichten
- Zeigen von Bildern, Fotos oder Filmen
- Abspielen von Tonmaterialien
- Verwendung von authentischen Materialien
- Besuche vor Ort/ Originalbegegnungen
- Einbezug des Vorwissens
- Gesprächskreis im Plenum
- Visualisierungen: Mindmaps, clustern (um Vorerfahrungen der SS einzubeziehen, emotionalen Bezug zum Thema herzustellen, Vorwissen zu aktivieren und zu nutzen)

Reflexion über Lösungsansätze – Brainstorming

- Einzelarbeit
- Partnerarbeit
- Gruppenarbeit
- Plenum
- Prinzip Ich – Du - Wir

3. Bearbeiten der Lösungsansätze

- Gruppenarbeit
 - Gruppenpuzzle
 - Partnerarbeit
 - Arbeit an Stationen
 - Bilden von Expertenteams (ab Klasse 3 und 4)
 - Hausarbeit (Infos einholen, Befragungen, ...)
 - Gesprächsphasen im Plenum
- ### 4. Ergebnissicherung
- Präsentation der Ergebnisse der GA (evtl. Video)
 - Erstellen einer Wandzeitung
 - Erstellen von Plakaten und Museumgang
 - Anfertigen von Dokumentationsmappen
 - Anfertigen von Protokollen (ab Klasse 3 oder 4)
 - Anfertigen von Lerntagebüchern
 - Diskussion und Vergleich verschiedener Lösungsansätze

Übung1: Setzen Sie die „Schokokuss-Aufgabe“ im Unterricht ein.

Max will an seinem 8. Geburtstag mit seinen Gästen Schokoküsse essen.

Wie viele Schachteln muss er mit seiner Mutter einkaufen?

1. In welcher Jahrgangsstufe würden Sie diese Aufgabe einsetzen?
2. Lösen Sie die Aufgabe.
3. Welche Schritte durchlaufen Kinder, die diese Aufgabe lösen?
3. Planen Sie einen möglichen Unterrichtsverlauf und notieren Sie diesen auf Folie.



Mögliche Lösung der „Schokokuss-Aufgabe“

nach Maaß, K.: Mathematikunterricht weiterentwickeln, Aufgaben zum mathematischen Modellieren, Erfahrungen aus der Praxis, Für die Klassen 1 bis 4, Cornelsen 2009, S. 106-107

*Max will an seinem 8. Geburtstag mit seinen Gästen Schokoküsse essen.
Wie viele Schachteln muss er mit seiner Mutter einkaufen?*

1. Einsatz ab Klasse 2, enaktiv kann Aufgabe auch Ende der 1. Klasse gelöst werden.
2. Max darf 8 Gäste einladen. Jeder Gast isst 3 Schokoküsse (-> 27 Schokoküsse). In einer Schachtel sind 9 Schokoküsse. Max benötigt 3 Schachteln. Die Schüler können auf eigene Erfahrungen zurückgreifen und Fragen stellen:
 - Wie viele Gäste waren bei meiner letzten Geburtstagsfeier?
 - Wie viele Gäste waren bei der letzten Geburtstagsfeier, auf der ich eingeladen war?
3. Schritte beim Lösen der Aufgabe -> siehe Modellierungskreislauf
4. Möglicher Unterrichtsverlauf -> siehe Maaß, K.: Mathematikunterricht weiterentwickeln, S. 107

Hinweise zum Unterrichtsverlauf:

- authentische Fragestellung
- Ergebnis kann mit Material erarbeitet werden (z.B. Plättchen auf leere Schokokusschachteln verteilen oder evtl. auch Mini-Schokoküsse)
- Für GA geeignet: Zuerst in Gruppen besprechen und bearbeiten dann Lösungen im Plenum besprechen und vergleichen (Rechenkonferenz)

Möglicher Unterrichtsverlauf:

Problemgewinnung

Hinführung/ Einstimmung:

Kinder berichten von Erfahrungen mit Kindergeburtstagen

(Haben sie schon geholfen, eigene Party vorzubereiten? Was gibt es zu essen?)

→ Kinder haben Zeit, sich in die Situation einzufinden

Präsentation der Aufgabe

L-Erzählung von Max und seiner Geburtstagsparty mit den Schokoküssen

L: Max braucht Hilfe.

Zielangabe: Wir helfen Max

Problemlösung

Entwicklung von Lösungshilfen und -strategien

SS machen Vorschläge, wie Max geholfen werden kann.

(Hinweis: Der Lehrer sollte sich zunächst im Hintergrund halten und Ideen sammeln.

Wenn die Kinder hier nur irgendwelche Zahlen nennen, muss darauf aufmerksam gemacht werden, dass man erst bestimmte Dinge bedenken muss)

L zeigt Schokokusschachteln zur Anschauung.

L hält erste Ideen an der Tafel fest. (z.B. Wie viele Gäste kommen? Wie viele Schokoküsse isst jeder? Wie viele sind in einer Packung?)

GA (3 Kinder pro Gruppe): Gruppen erhalten Plakate

(Hinweis. GA muss vorbereitet werden: Mit SS müssen Symbole verabredet werden, mit denen sie ihre Lösung darstellen können. Sie sollen lernen, Skizzen anzufertigen. So kann

z.B. verabredet werden, die Gäste durch Strichmännchen darzustellen und die Schokoküsse durch Halbkreise.)

L: Schreibe und zeichne deine Lösung so, dass die anderen Gruppen die Lösung verstehen.

SS entwickeln Lösungen in Gruppen.

L hält sich mit konkreten Lösungsvorschlägen zurück.

L motiviert Kinder und stellt je nach Arbeitstand der Gruppe Fragen, die den Kindern helfen, zielorientiert zu arbeiten.

L: Was hast du bisher gemacht? Warum? Wie kannst du weitermachen? Wo hast du Probleme.

Präsentation der Lösungen

L: Du hast mit deiner Gruppe Lösungen gefunden.

Gruppen stellen ihre Lösungswege und Ergebnisse vor und heften dazu Plakat an Tafel. (Gruppensprecher spricht laut)

(Hinweis: Fokus sollte auf Lösungsweg liegen)

L: Hör dir den Lösungsweg der Gruppe genau an und stelle dann Fragen dazu.

Zwei bis drei Präsentationen an der Tafel

L: Du hast nun einige Lösungswege gehört und gesehen. Vergleiche die Lösungen (L deutet an Plakate an TA)

Rückbesinnung

L: Was war an dieser Aufgabe anders als bei den Aufgaben aus dem Mathebuch?

SS reflektieren Aufgabenart und Lösungsweg.

Übung 2: Wie kann die Modellierung der Weihnachtsferien-Aufgabe aus dem ersten Seminar aussehen?

Die Weihnachtsferien begannen am 23.12.1977. Das war der erste Ferientag. Sie endeten am 8.1.1978. Das war der letzte Ferientag. Wie lange dauerten die Weihnachtsferien?

- Lösung siehe: Krauthausen, G./Scherer, P.: Einführung in die Mathematikdidaktik, Elsevier, München 2004, S.73ff.

Analoge Aufgaben in Schulbüchern zum Lehrplan PLUS :

- Zahlenzauber 2, S. 120-121 (<http://www.olderbourg.de/osv/reihe/r-6266/ra-9728/titel>)
- Fredo, S: 126-127 (<http://www.olderbourg.de/osv/reihe/r-7227/ra-9773/titel>)

Literatur:

- Maaß, K.: Mathematikunterricht weiterentwickeln, Aufgaben zum mathematischen Modellieren, Erfahrungen aus der Praxis, Für die Klassen 1 bis 4, Cornelsen 2009
- Hinrichs, G.: Modellierung im Mathematikunterricht, Spektrum, Heidelberg 2008
- http://www.kontexis.de/upload/pdf/Arbeitsheft/AH-03_2008.pdf (viele Modellierungsaufgaben von Katja Maaß!)
- Pfaller, M.: Sachrechnen im 3. Schuljahr: Anknüpfen und Vertiefen – Manege frei für Lösungsschritte, Lösungshilfen und Größen. In: Häring, G. (Hrsg.): Start in den Unterricht, Mathematik, Klasse 3, Friedrich Verlag 2010, S- 57) (www.start-in-den-unterricht.de)
- http://www.kira.tu-dortmund.de/front_content.php?idcat=186
- http://www.sinus-an-grundschulen.de/fileadmin/uploads/Material_aus_SGS/Handreichung_Maass_2011-2.pdf